

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 18 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים.....1

## כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

### שאלות

(1) נתון:  $x = 2u - v$ ,  $y = u^2 + v^2$ ,  $z = \ln(x^2 - y^2)$   
חשבו:  $z_u$ ,  $z_v$ .

(2) נתון:  $v = 4t + k$ ,  $u = t^2 + 4m$ ,  $z = e^{u-v}$   
חשבו:  $z_t$ ,  $z_m$ ,  $z_k$ .

(3) נתון:  $z = f(x^2 - y^2)$   
הוכיחו:  $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$ .

(4) נתון:  $z = f(xy)$   
הוכיחו:  $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$ .

(5) נתון:  $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$   
הוכיחו:  $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$ .

(6) נתון:  $z = f(x - y, y - x)$   
הוכיחו:  $z_x + z_y = 0$ .

(7) נתון:  $w = f(x - y, y - z, z - x)$   
הוכיחו:  $w_x + w_y + w_z = 0$ .

(8) נתון:  $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$   
הוכיחו:  $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$ .

(9) נתון:  $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

הוכיחו:  $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$

(10) נתון:  $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

הוכיחו:  $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$

(11) נתון:  $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

הוכיחו:  $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$

(12) נתון:  $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

הוכיחו:  $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$

(13) נתון:  $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$

הוכיחו:

א.  $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב.  $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשבו את  $u_{xy}(1, \pi)$ , אם ידוע ש- $g'(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$ .

(14) נתון:  $y = r \sin \theta$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $u = f(x, y)$

א. הוכיחו:  $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$

ב. הוכיחו:  $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

ג. הוכיחו:  $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$

**15** נתון  $z = h(u, v)$ , ונתון כי  $u = f(x, y)$ ,  $v = g(x, y)$  מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ . הוכיחו כי:

א.  $u, v$  מקיימות את משוואת לפלס.  
 כלומר,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  וכן  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ .

ב.  $h_{xx} + h_{yy} = \left( (u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$ .

**16** נתון:  $y = r \sinh s$ ,  $x = r \cosh s$ ,  $u = f(x, y)$ . הוכיחו כי:  $(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$ .

**17** פונקציה  $f(x, y)$  תיקרא הומוגנית מסדר  $n$ , אם  $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$ . הוכיחו כי אם  $f$  הומוגנית, אז:

א.  $x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$   
 ב.  $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$

**18** נתונה הפונקציה  $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .  
 ב. נתון  $x = 2t, y = t$ . חשבו את  $z'(0)$  באופן ישיר.  
 ג. נתון  $x = 2t, y = t$ . חשבו את  $z'(0)$  לפי כלל השרשרת.  
 ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

## תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

$$-e \quad \text{ג.} \quad (13)$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{א.} \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{5} \quad \text{ג.} \quad 0 \quad \text{ד.} \quad \text{לא דיפרנציאבילית.} \quad (18)$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)